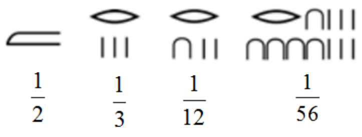
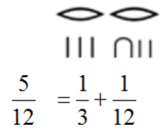
Ägyptische Zahlen und Brüche

Die Ägypter hatten unser Stellenwertsystem noch nicht, sie benutzten kleine bildhafte Darstellungen (die etwa 3000 v. Chr. erfunden wurden), die man *Hieroglyphen* nennt (das heißt „heiliges Eingeritztes“). Aus den Bildern oben kann man erkennen, wie Zahlen geschrieben wurden. Für die 1 gab es einen Strich, für die 10 das Symbol ∩ usw., wie abgebildet. Für den Bruch 1/2 gab es ein eigenes Zeichen und weitere Brüche wurden durch einen über die Zahl gestelltes Oval, die Hieroglyphe für „Mund“ (das hier aber für „Anteil“ steht) geschrieben.





?

Nur für Stammbrüche gab es Zeichen. Die Ägypter mussten 5/12 daher als Summe sogenannter *Stammbrüche* schreiben.

Nun hätte man für $\frac{3}{10}$ natürlich einfach $\frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ schreiben können, aber $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ oder $\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ ist kürzer und für den Mathematiker natürlich auch weniger langweilig und daher schöner. Die alten Ägypter vermieden bereits die langweilige Darstellung (vermutlich, um weniger in Stein meißeln zu müssen) und die Mathematik hat hier ein Forschungsfeld gefunden, das bis heute interessante offene Fragen lässt (dass wir uns heute solche Fragen stellen, ist allerdings eine griechische Erfindung, ab ca. 600 v. Chr. begann die Mathematik als beweisende Wissenschaft). Wir kleiden die Auseinandersetzung mit diesem Thema in eine Aufgabenserie mit wachsendem Schwierigkeitsgrad. Wir suchen Sätze und Beweise. Die letzte Aufgabe ist allerdings ein bis heute ungelöstes Problem der Mathematik. Wer sie löst, wird berühmt!

Aufgaben

1. Welcher Bruch wird in dem Beispiel rechts dargestellt (über dem Kasten mit dem Fragezeichen)?
2. Man schreibe $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{11}$ als Summe von Stammbrüchen. Erfinde ein Verfahren, das bei allen Brüchen funktioniert und beweise, dass es immer funktioniert (natürlich sind nur echte und ausgekürzte Brüche interessant).
3. Kann man jeden Stammbruch (also z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{1001}$) als Summe *zweier* Stammbrüche mit verschiedenen Nennern schreiben? Wie sieht es aus, wenn man als Zähler immer die 2 nimmt (also z. B. $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}$)?

   Kann man auch jede andere höhere Anzahl von Summanden verwenden?
4. Für den Bruch $\frac{2}{15}$ gibt es mehrere Möglichkeiten, ihn als Summe zweier Stammbrüche zu schreiben. Finde sie alle.

   Für bestimmte Zahlen im Nenner $\frac{2}{n}$ gibt es nur genau eine Darstellung der Form $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad mit \;\; a \neq b$
5. Zwei berühmte (unbewiesene) neuere Vermutungen (von ERDÖS, STRAUS) sagen:

   Für alle natürlichen Zahlen $n > 3$ gibt es immer eine Darstellung $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ mit $a, b, c \in IN$ und auch für

   $\frac{5}{n}$ gibt es immer eine Darstellung, die ebenfalls nur 3 Summanden verwendet.