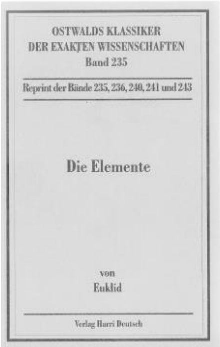
Schülerzirkel am Geomatikum am 31. 3. 2017

Aus den Elementen des Euklid (Euklid lebte im 3. Jh. vor Christus)

Im online-Lexikon wikipedia lesen wir:



Euklids Elemente oder Die Elemente (im Original Στοιχεῖα Stoicheia) ist eine Abhandlung des griechischen Mathematikers Euklid (3. Jh. v. Chr.), in der er die Arithmetik und Geometrie seiner Zeit zusammenfasst und systematisiert. Das Werk zeigt erstmals musterhaft den Aufbau einer exakten Wissenschaft, da die meisten Aussagen aus einem begrenzten Vorrat von Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet und bewiesen werden. Dieses Vorgehen beeinflusste bis heute nicht nur die Mathematiker, sondern auch viele Physiker, Philosophen und Theologen bei ihrem Versuch, ihre Wissenschaft auf Axiomen aufzubauen.

Die Elemente wurden 2000 Jahre lang als akademisches Lehrbuch benutzt und waren bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meistverbreitete Werk der Weltliteratur.[1][2]

[1] Belegt wird die Bedeutung des Euklid und der Elemente unter anderem durch den Mathematiker und Philosophen Paul Lorenzen, der in der Einleitung seiner Elementargeometrie schreibt (S. 9): Euklid ist der berühmteste Geometer der Welt. Die Bibel und Euklids „Elemente“ waren fast 2000 Jahre lang bei weitem die meistgelesenen Bücher. Was bei uns im Schülerjargon „Mathe“ heißt, heißt im englischen Sprachraum immer noch „Euclid“. Aber während sich die Leser des Alten Testaments zerstritten in Leser des Neuen Testaments und des Korans, hat Euklid das gleiche Interesse bei jüdischen, christlichen und islamischen Gelehrten behalten. Obwohl man von seinem Leben (um 300 ante in Alexandrien am Hof des ersten Ptolemäers) fast nichts weiß, gibt es seit der Spätantike lateinische, seit etwa 800 arabische Übersetzungen. In der Scholastik war die Übersetzung von Campanus (13. Jh. nach arabischer Vorlage) maßgebend – sie wurde 1482 gedruckt. Bis weit ins 19. Jahrhundert wurden die Elemente als Schulbuch gebraucht.

[2] In gleicher Weise äußert sich der Geometer und Mathematikhistoriker Howard Whitley Eves in An Introduction to the History of Mathematics (S. 115): … No work, except the Bible, has been more wideley used, edited or studied, and probably no work has exercised a greater influence on scientific thinking. Over a thousand editions of Euclid's Elements have appeared since the first one printed in 1482, and more than two millennia this work has dominated all teaching of geometry.

Zitatende

Die Elemente kann man z. B. in der Reihe „Oswalds Klassiker“ auch heute noch kaufen.

Wir wollen heute zwei zahlentheoretische Sätze aus den Elementen lesen, verstehen und in eigenen Worten nachvollziehen. Die Ausdrucksweise ist für uns heute etwas ungewöhnlich und mathematische Texte sind ohnehin nicht so leicht lesbar wie Romane, man muss ein Blatt Papier nehmen, einen Schreiber und sich stückweise mit eigenen Gedanken so einen Text erschließen.

Die Texte sind aus dem neunten Buch der Elemente:

Aufgabe 1. Einer der berühmtesten Beweise Euklids, der das Unendliche betrifft

§ 20 (L. 18).

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Die vorgelegten Primzahlen seien a, b, c. Ich behaupte, daß es mehr Primzahlen gibt als a, b, c.

a – – – b – – – – – c – – – – – – –

E – – 105 – – DF g – –

Man bilde die kleinste von a, b, c gemessene Zahl (VII, 36); sie sei DE, und man füge zu DE die Einheit DF hinzu. Entweder ist EF dann eine Primzahl, oder nicht. Zunächst sei es eine Primzahl. Dann hat man mehr Primzahlen als a, b, c gefunden, nämlich a, b, c, EF.

Zweitens sei EF keine Primzahl. Dann muß es von irgendeiner Primzahl gemessen werden (VII, 31); es werde von der Primzahl g gemessen. Ich behaupte, daß g mit keiner der Zahlen a, b, c zusammenfällt. Wenn möglich tue es dies nämlich. a, b, c messen nun DE; auch g müßte dann DE messen. Es mißt aber auch EF. g müßte also auch den Rest, die Einheit DF messen, während es eine Zahl ist; dies wäre Unsinn. Also fällt g mit keiner der Zahlen a, b, c zusammen; und es ist Primzahl nach Voraussetzung. Man hat also mehr Primzahlen als die vorgelegte Anzahl a, b, c gefunden, nämlich a, b, c, g — q. e. d.

Man muss wissen, dass die alten Griechen oft *„geometrisch dachten und sprachen“*. Daher werden einzelne Zahlen sowohl durch zwei Großbuchstaben bezeichnet (also als Streckenlänge gedacht), als auch mit einem Kleinbuchstaben. Diese Konvention hat sich in der Geometrie bis heute erhalten. Für zahlentheoretische Texte ist das für uns sehr ungewohnt, es ist nicht einfach, den Text zu verstehen. Man merkt, dass man ihn verstanden hat an der inneren Freude des „Aha-Effektes“ („Heureka“ rief der alte Archimedes nach einer Anekdote, als er ein physikalisches Prinzip erkannte). Wenn man den Beweis richtig verstanden hat, soll er in eigenen Worte umgeschrieben werden.

Aufgabe 2. Hier es geht um vollkommene Zahlen (eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist). Wir wollen nur den Satz verstehen und einen eigenen Beweis suchen.

§ 36 (L. 34).

Verschafft man sich beliebigviele Zahlen, von der Einheit aus in Reihe nach dem Verhältnis 1: 2, bis die Summe aus allem eine Primzahl wird, und bildet die Summe, mit dem letzten Glied vervielfältigt, eine Zahl, so muß das Produkt eine vollkommene Zahl sein.

Man verschaffe sich beliebigviele Zahlen a, b, c, d, von der Einheit aus im Verhältnis 1 : 2, bis die Summe aus allem

a – – b – – – – c – – – – – – – – d – – 16 – –

e – – 31 – – F – – 31 – – O – – 465 – – G

H – – 31 – – N – – 31 – – K l – – 124 – – m – – 248 – –

p – – ? – – q – – ? – –

eine Primzahl wird; ferner sei e der Summe gleich, und e bilde, indem es d vervielfältigt, FG. Ich behaupte, daß FG eine vollkommene Zahl ist.

Euklid verrät uns ja die „Bauart“ , so dass wir nur noch überlegen müssen, welche Teiler es gibt. Es dauerte übrigens 2000 Jahre, bis Euler bewies, dass es keine weiteren anderen geraden vollkommenen Zahlen als die von Euklid genannten geben kann. Wir müssen also nur alle Teiler hinschreiben (am besten für eine uns bekannte vollkommene Zahl) und nach einer Möglickeit Ausschau halten, diese Zahlen „intelligent zu addieren“. Dann haben wir eine Anleitung für den allgemeinen Fall.