# Quadrate zählen, Fortsetzung

Für die Anzahl der Quadrate, die man so in ein n x n – Raster legen kann, dass ihre Ecken auf Rasterpunkten liegen, hatten wir für den Fall, dass die Quadratseiten achsenparallel liegen und für den Fall, dass sie mit den Achsen einen 45°-Winkel bilden, die folgenden Berechnungsmöglichkeiten gefunden:

Parallellage: $A(6) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$ allgemein: $A(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots n^2$

45°-Lage: $B(6) = 1^2 \quad + 3^2 \quad + 5^2$ allgemein: $B(n) = 1^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2$

(für gerades $n$)

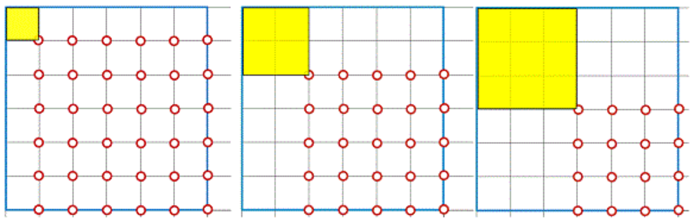


Abb. 1, Parallellage

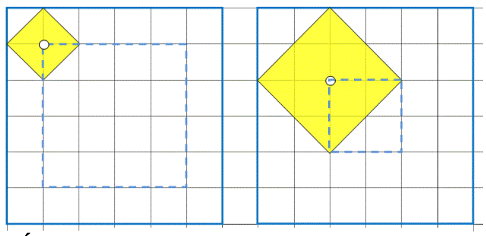


Abb. 2, 45°-Lage

Für ungerades $n$ findet man: $B(n) = 2^2 + 4^2 + \ldots (n-1)^2$ .

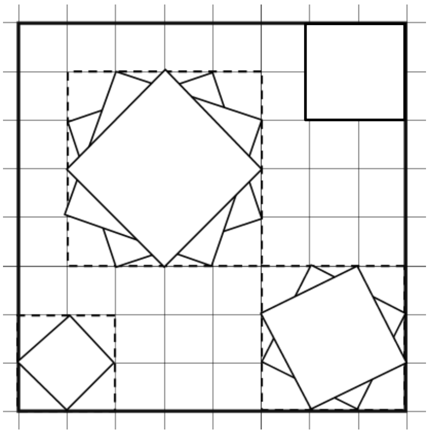
Für n = 11 also z. B.: $B(11) = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$ $2^2$ ausklammern:

$$B(11) = 2^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right)$$

**Aufgabe 1**

Für die Summe der Quadrate wissen wir $A(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Mit Hilfe dieser Formel soll ein Ausdruck für $B(n) = 2^2 + 4^2 + \ldots (n-1)^2$ und für $B(n) = 1^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2$ hergeleitet werden. Es kann günstig sein, für ein gerades $n$ den Ausdruck $2k$ zu verwenden und für den ungeraden Fall $n = 2k+1$ zu setzen.

**Aufgabe 2**



Nun lassen wir beliebige Schieflagen zu. Wir fragen nach einem Rechenausdruch für die Gesamtzahl der in das Raster (Ecken auf Rasterpunkten) einbeschreibbaren Quadrate. Dieser Rechenausdruck kann rekursiv oder explizit sein. Letzteres bietet zusätzliche Schwierigkeiten, so dass man erst einmal nach einer rekursiven Berechnungsmethode suchen sollte. Dabei ist es hilfreich, sich zu überlegen, dass auch jedes schiefliegende Quadrat in einen achsenparallelen quadratischen Minimal-rahmen eingebettet ist.

Abb. 3, beliebige Lagen