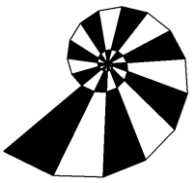
Schülerzirkel am Geomatikum am 22. 1. 2016



Das Münzproblem von Frobenius, Teil II

Welche Beträge können mit nur zwei Münzwerten *a* und *b* bezahlt werden? Aus Beispielen wie dem folgenden wurde eine richtige Vermutung gewonnen und bewiesen.

Beispiel *a* = 6 und *b* = 7: Darstellbarkeit von *n* in der Form $n = x \cdot 6 + y \cdot 7$

0 ~~1 2 3 4 5~~ **6 7** ~~8 9 10 11~~ **12 13 14** ~~15 16 17~~ **18 19 20 21** ~~22 23~~ **24 25 26 27 28** ~~29~~ **30 31 32 33 34 35 36 37 38...**

ja nein ja ... ab 30 alle

Satz

Gegeben seien zwei natürliche aufeinanderfolgende Zahlen *a* und *b*. Jede natürliche Zahl $n \geq (a-1)(b-1)$ ist in der Form $n = x \cdot a + y \cdot b$ mit natürlichen Zahlen *x* und *y* darstellbar.

Aufgaben I (in beliebiger Reihenfolge zu bearbeiten, es gibt Beweisaufgaben und Mustersuchen

1. Der Satz ist auch für nicht aufeinanderfolgende teilerfremde Zahlen wie *a* = 7 und *b* = 13 richtig. Der Beweis aus der letzten Sitzung funktioniert allerdings nur für aufeinanderfolgende Zahlen. Uns fehlt also noch ein Beweis für die allgemeinere Aussage.
2. Der Satz sagt nichts darüber aus, ob nicht eventuell für irgendwelche *a* und *b schon bei einer kleineren Zahl* der Bereich der lückenlosen Darstellbarkeit beginnt. Für das Beispiel oben kann man das ausschließen, durch systematisches Probieren wurde nachgewiesen, dass 29 nicht darstellbar ist. Allerdings fehlt uns auch hier ein allgemeiner Beweis.

   Tip: Man führe einen Widerspruchsbeweis. Dazu nimmt man an, dass es teilerfremde natürliche Zahlen *a, b* gibt und die letzte Zahl vor $(a-1)(b-1)$, also $n = (a-1)(b-1)-1 = ab-a-b$ in der gewünschten Form darstellbar ist. Daraus lässt sich dann ein Widerspruch ableiten. Die größte Zahl, die nicht darstellbar ist, nennt man *Frobenius-Zahl*.
3. Der britische Mathematiker James Joseph Sylvester hat auch Fälle mit 3 und mehr im gleichen Abstand aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen als Münzwerte untersucht und eine Formel zur Berechnung der Frobenius-Zahl gefunden (und bewiesen). Versuche diese Formel für den Fall dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu vermuten.
4. Man stelle sich selbst weitere Untersuchungsaufgaben.

Aufgaben II (für diejenigen, die mit dem Münzproblem erst einmal Pause machen wollen)

Mit dem Gewichtssatz $G_1 = \{1, 2, 2, 5, 10\}$ aus 5 Gewichten kann man lückenlos alle Gewichte von 1 bis 20 abwiegen.

Man suche einige Gewichtssätze aus 5 Gewichten, mit denen man weiter kommt.

Man kann zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Gewichte dürfen nur auf einer Seite der Waage liegen.

b) Die Gewichte dürfen auf beiden Seiten der Waage liegen.

Gibt es optimale Gewichtssätze?