



## Das Münzproblem von Frobenius



Ferdinand Georg Frobenius war ein deutscher Mathematiker. Er lebte von 1849 bis 1917 in Berlin und formulierte ein mathematisches Problem, das heute zu den Standardinhalten von Zahlentheorievorlesungen gehört und das man das „Münzproblem“ nennt.

Heute weiß man zwar sehr viel über das Problem aber bei weitem noch nicht alles. Wir wollen einmal sehen, wie weit wir durch eigenes Ausprobieren und Nachdenken kommen und danach einen Blick auf bekannte Ergebnisse und offene Fragen werfen.

### A Das Ausgangsproblem

Wir haben nur zwei Sorten von Münzen mit den ganzzahligen Werten  $a$  und  $b$  (jeweils in beliebiger Menge). Wir betrachten zunächst das Beispiel  $a = 5$  und  $b = 8$  und stellen zwei Fragen:

- 1 Welche Beträge kann man mit diesen Münzen bezahlen, wenn Wechselgeld herausgegeben werden kann?
- 2 Welche Beträge kann man bezahlen, wenn kein Wechselgeld herausgegeben werden darf?

### B Verallgemeinerungen

Es ist klar, dass die Fragen auch für andere Wertekombinationen gestellt werden können und dass man die Anzahl der zur Verfügung stehenden Münzwerte erhöhen kann.

Wir bleiben zunächst aber bei zwei verschiedenen Werten und betrachten die Fälle  $(a, b) = (7, 8)$  und  $(a, b) = (9, 12)$  und  $(a, b) = (5, 11)$  und weitere selbst gewählte Beispiele.

Man stelle wieder Untersuchungen und Überlegungen zu den beiden Fragen an.

Bei Frage 2 wird es schnell interessant zu schauen, für welche Vorgaben man ab einer gewissen Grenze jeden Betrag darstellen kann. Zur Hypothesenbildung und Findung von Beweisideen kann es lohnend sein, Fälle mit aufeinanderfolgenden Zahlen zu betrachten. Für derartige Vorgaben kann man dann fragen, wo diese Grenze liegt und wie man diese Grenze aus den Zahlen  $a$  und  $b$  berechnen kann. Diese Grenze (genauer: die größte Zahl, die man nicht darstellen kann) nennt man übrigens Frobenius-Zahl zu der erlaubten Menge an Münzwerten.

Für den Fall zweier Münzwerte weiß man seit dem 19. Jd. Bescheid, der britische Mathematiker James Joseph Sylvester hat dazu umfassende Antworten gefunden. Wir wollen sehen, wie weit wir mit eigenen Mitteln kommen.