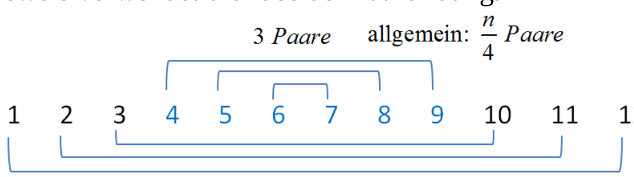
Halbsummenfenster II

In der letzten Sitzung wurde bewiesen, dass für alle durch 4 teilbare Zahlen $n = 4k$ Halbsummenfenster existieren. Der Beweis verwendet die Idee der Paarbildung.



Innen und außen hat man bei allen durch 4 teilbaren n (12 ist nur ein spezielles Beispiel) eine durch 2 teilbare Anzahl von Paaren (nämlich $n/2$) gleicher Summe, folglich ist die Summe der mittleren $n/4$ Paare gleich der halben Summe aller Zahlen, diese Paare bilden also ein Halbsummenfenster. **q. e. d.**

Auch für Zahlen der Form $n = 4k - 1$ existieren Halbsummenfenster. Zum Beweis dieser Aussage wurde in der letzten Sitzung schon eine Beweisidee angesprochen. Ein ebenso klarer Beweis wie der hier gezeigte, steht allerdings noch aus und sollte noch gesucht werden.

Der obige Beweis kommt ohne Formeln aus. Dennoch sind Formeln oft nützlich und können es auch hier sein. Bei unserem Problem spielen Summen aufeinanderfolgender Zahlen eine entscheidende Rolle. Wir wollen daher Formeln für derartige Summen herleiten. Dazu können die in Abb. 1 gezeigten Muster hilfreich sein (mit derartigen Mustern, hat Pythagoras um 500 v. C. gearbeitet).

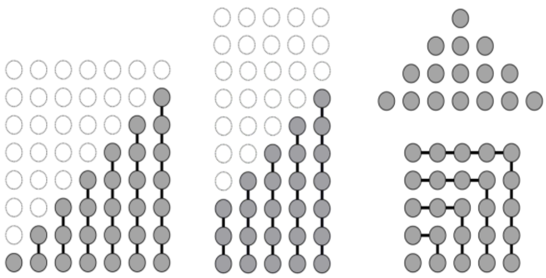


Abb. 1, figurierte Zahlen

1 2 .. **10** .. 20.. 30... 40... 50...**60**... 70...80.84
1 2 .. 10 .. .**22**. 30... 40... 50....**63**...70...80.84
1 2 .. 10 .. 20.. 30.**34** ..... 50...60.**68**.70...80.84
1 2 .. 10 .. 20.. 30..**36** .... 50...60...**69**... 80.84
1 2 .. 10 .. 20.. 30... ...**45**.50...60... ..**74**.80.84

Abb. 2, Halbsummenfenster für $n = 84$

Aufgaben

1. Abb. 2 zeigt fünf Halbsummenfenster für $n = 84$. Rechne das nach. Zur schnellen Berechnung liefert Abb. 1 (die beiden Muster links) Ideen.

   Leite aus Abb. 1 Formeln für folgende Summen ab: (I) $1 + 2 + 3 + 4 + n$ = Formel (n)
   (II) $1 + 3 + 5 + 7 + (2k\text{-}1)$ = Formel (k) (III) $k + (k+1) + ... m$ = Formel (k, m)
   Welche Summen stecken in der Anordnung aus Abb. 1, rechts oben?

2. Führe einen zweiten Beweis für den oben angegebenen Satz. Gehe dazu von einer durch 4 teilbaren Zahl $n = 4k$ aus und berechne zunächst $1 + 2 + 3 + ... + 4k$. Drücke sodann die erste und letzte Zahl im Halbsummenfenster durch k aus und rechne mit Hilfe der Formeln nach, dass die Summe der Zahlen im Fenster genau halb so groß wie die Summe aller Zahlen ist. Führe auch einen Beweis dieser Art für unsere zweite Serie für Zahlen der Form $n = 4k - 1$.

3. Für unser Problem ist es nützlich zu wissen, wie man alle Darstellungen einer Zahl als Summe aufeinanderfolgender Zahlen findet (Beispiel: Für 15 gibt es 4 Darstellungen: 1+2+3+4+5, 4+5+6, 7+8, 15). Fertige eine Liste für die Zahlen von 1 bis 20 an. Suche dann alle derartigen Darstellungen für 315. Entwickle eine Methode, alle derartigen Darstellungen zu finden.