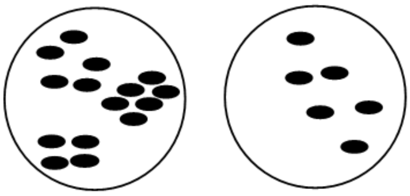
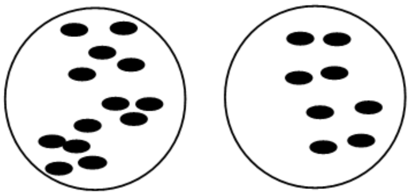
Schülerzirkel am Geomatikum am 13. 7. 2017

Die Bohnenrechnung , Teil 2

Wir verteilen **21** Bohnen auf zwei Teller und multiplizieren dann die auf den Tellern liegenden Anzahlen miteinander:



eine andere Möglichkeit:



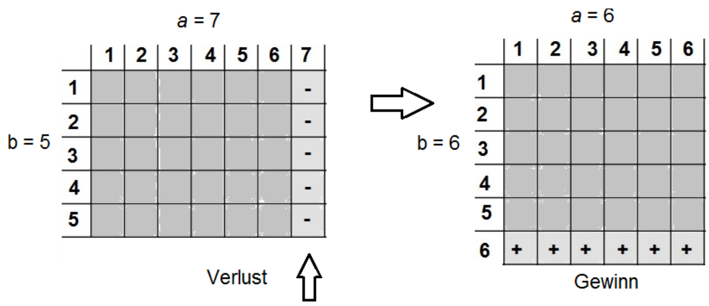
$15 + 6 = \mathbf{21}$ und $15 \cdot 6 = \mathbf{90}$ $\qquad$ $13 + 8 = \mathbf{21}$ und $13 \cdot 8 = \mathbf{104}$

Es kommt also nicht bei jeder Aufteilung dasselbe heraus.

Der Fall, dass man genau zwei Summanden hat, wurde beim letzten Treffen gelöst. Wir schauen uns noch einmal den Satz und seinen Beweis an:

Satz: Gegeben sei eine natürliche Zahl *n* und eine Aufspaltung $n = a + b$ in zwei Summanden (ebenfalls natürliche Zahlen).
Behauptung: Das Produkt der beiden Summanden $a \cdot b$ ist genau dann maximal, wenn *a* und *b* sich höchstens um 1 unterscheiden (wenn *n* gerade ist, ist *a* = *b* und sonst *a* = *b* + 1 oder umgekehrt).

Beweis: Wir deuten $a \cdot b$ als Fläche eines Rechtecks. Wenn man die Seite *a* um eine Einheit verkürzt und die Seite *b* dafür um eine Einheit verlängert, so verliert man *b* Flächeneinheiten und gewinnt *a* - 1 Flächeneinheiten hinzu. Die beste Aufteilung ist die einzige, die sich nicht verbessern lässt, bei der die Differenz von *a* und *b* also höchstens 1 ist (es gibt nur endlich viele Fälle, also muss es solche mit maximalem Produkt geben). q. e. d.



Weiterarbeit

1. Man kann den Beweis auch rein algebraisch führen, indem man beweist, dass aus einer Ungleichung (der Voraussetzung), die behauptete Ungleichung (man kann verbessern) folgt.

   $a > b + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathit{Ungleichung\ II}$. Wie lautet *Ungleichung II*? Führe einen Beweis.

2. Welche Aufteilung sollte man wählen, wenn man drei Summanden bilden darf und wieder ein möglichst großes Produkt haben will?

3. Wie ist es, wenn man beliebig viele Summanden verwenden darf und wieder möchte, dass das Produkt aus allen diesen Summanden möglichst groß ist. Kläre den Fall für n = 999, 1000, 1001